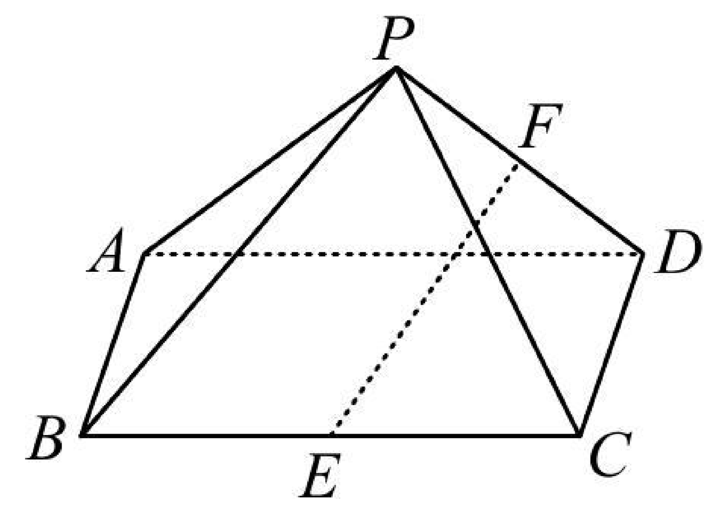
模块四 综合提升篇（★★★☆）

强化训练

1.（2023·山西忻州模拟·★★★）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是矩形，$PA=\sqrt{2}AB$，E，F 分别是棱 BC，PD 的中点，则异面直线 EF 与 AB 所成角的余弦值是（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（B）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　（D）$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$



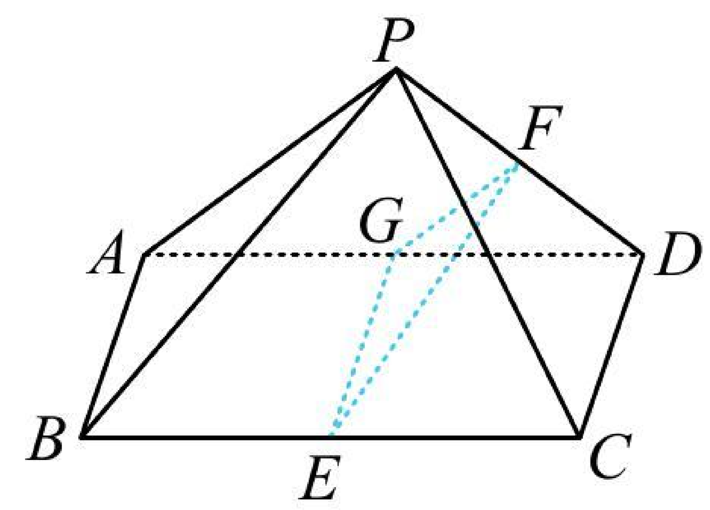
答案：B

解析：观察发现 $ABCD$ 是矩形，平移 AB 比较方便，如图，取 AD 中点 G，连接 GE，GF，则 $GE /\!/ AB$，所以 $GE\perp AD$，结合平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$ 可得 $GE\perp$ 平面 PAD，故 $GE\perp GF$，

《一数•高考数学核心方法》

设 $AB=a$，则 $GE=a$，$PA=\sqrt{2}a$，$GF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$EF=\sqrt{GE^2+GF^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$，

所以 $\cos\angle GEF=\dfrac{GE}{EF}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故异面直线 EF 与 AB 所成角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



2.（★★★）已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长与底面边长相等，则 AB_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角的正弦值等于（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　（B）$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

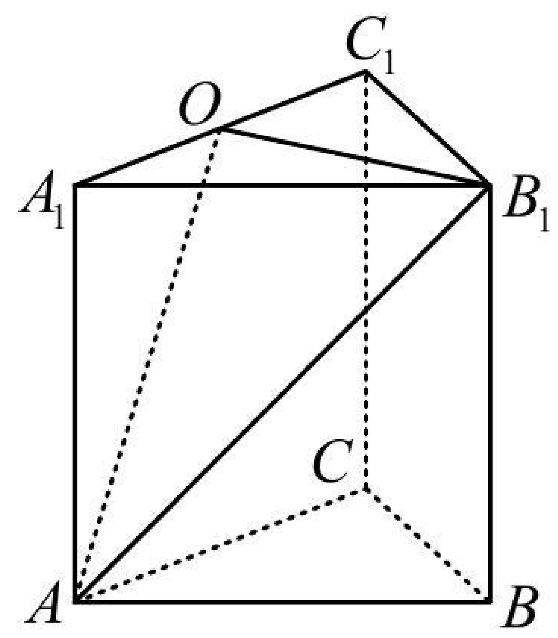
答案：A

解析：直三棱柱中，侧面的垂线易作，故直接作垂线，

如图，取 A_1C_1 中点 O，则 $B_1O\perp A_1C_1$，正三棱柱中 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $B_1O\perp AA_1$，

从而 $B_1O\perp$ 平面 ACC_1A_1，故 $\angle B_1AO$ 即为直线 AB_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角，

设 $AB=2$，则 $OB_1=\sqrt{3}$， $AO=\sqrt{5}$， $AB_1=2\sqrt{2}$，所以 $\sin\angle B_1AO=\dfrac{B_1O}{AB_1}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.



3.（2023 • 全国乙卷 • ★★★）已知 ΔABC 为等腰直角三角形，AB 为斜边，ΔABD 为等边三角形，若二面角 $C-AB-D$ 为 150°，则直线 CD 与平面 ABC 所成角的正切值为（　　）

（A）$\dfrac{1}{5}$　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{5}$　（D）$\dfrac{2}{5}$

答案：C

解析：两个等腰三角形有公共的底边，这种情况常取底边中点构造线面垂直，

如图，取 AB 中点 E，连接 DE，CE，由题意，$DA=DB$，

$AC=BC$，所以 $AB\perp DE$， $AB\perp CE$，

故 $\angle DEC$ 即为二面角 $C-AB-D$ 的平面角，

且 $AB\perp$ 平面 CDE，所以 $\angle DEC=150^\circ$，

作 $DO\perp CE$ 的延长线于 O，则 $DO\subset$ 平面 CDE，

《一数•高考数学核心方法》

所以 $DO\perp AB$，故 $DO\perp$ 平面 ABC，

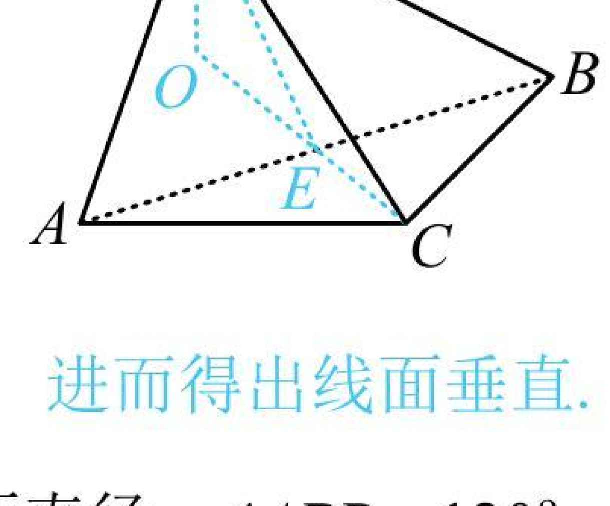
所以 $\angle DCO$ 即为直线 CD 与平面 ABC 所成的角，

不妨设 $AB=2$，则 $CE=1$， $DE=\sqrt{3}$，

因为 $\angle DEC=150^\circ$，所以 $\angle DEO=30^\circ$，

故 $OE=DE\cdot\cos\angle DEO=\dfrac{3}{2}$， $OD=DE\cdot\sin\angle DEO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$OC=OE+CE=\dfrac{5}{2}$，所以 $\tan\angle DCO=\dfrac{OD}{OC}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.



【反思】两个等腰三角形有公共底边这类图形，常取底边中点，构造两个线线垂直，进而得出线面垂直.

4.（2023 •新高考Ⅱ卷 •★★★）(多选)已知圆锥的顶点为 P，底面圆心为 O，AB 为底面直径，$\angle APB=120^\circ$，$PA=2$，点 C 在底面圆周上，且二面角 $P-AC-O$ 为 45°，则（　　）

（A）该圆锥的体积为 π

（B）该圆锥的侧面积为 $4\sqrt{3}\pi$

（C） $AC=2\sqrt{2}$

（D） ΔPAC 的面积为 $\sqrt{3}$

答案： AC

解析： A 项，因为 $PA=2$ ， $\angle APB=120^\circ$ ，所以 $\angle APO=60^\circ$ ， $OP=AP\cdot\cos\angle APO=1$ ，

$OA=AP\cdot\sin\angle APO=\sqrt{3}$ ，从而圆锥的体积 $V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\times\pi\times(\sqrt{3})^2\times1=\pi$ ，故 A 项正确；

B 项，圆锥的侧面积 $S=\pi rl=\pi\times\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}\pi$ ，故 B 项错误；

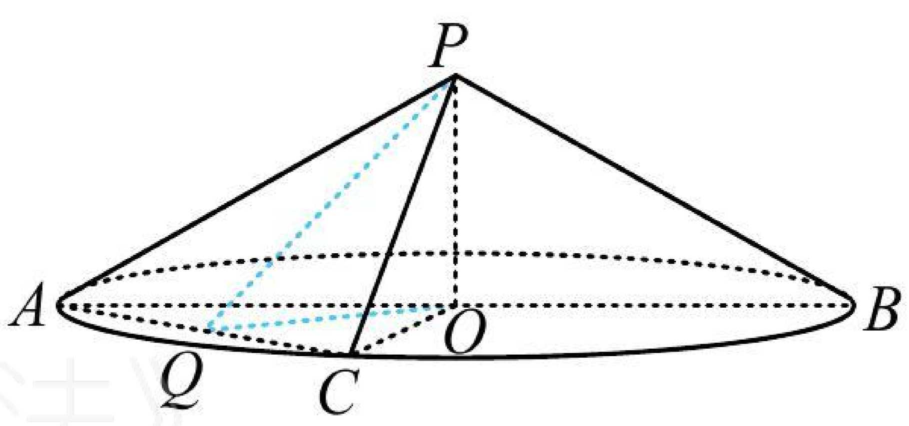
C 项，要求 AC 的长，条件中的二面角 $P-AC-O$ 还没用，观察发现 ΔPAC 和 ΔOAC 都是等腰三角形，故取底边中点即可构造棱的垂线，作出二面角的平面角，

取 AC 中点 Q，连接 PQ，OQ，因为 $OA=OC$ ， $PA=PC$ ，所以 $AC\perp OQ$ ， $AC\perp PQ$ ，

故 $\angle PQO$ 即为二面角 $P-AC-O$ 的平面角，由题意， $\angle PQO=45^\circ$ ，所以 $OQ=OP=1$ ，

故 $AQ=\sqrt{OA^2-OQ^2}=\sqrt{2}$ ，所以 $AC=2AQ=2\sqrt{2}$ ，故 C 项正确；

D 项， $PQ=\sqrt{OP^2+OQ^2}=\sqrt{2}$ ，所以 $S_{\Delta PAC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot PQ=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ ，故 D 项错误.



《一数•高考数学核心方法》

5．（2022 • 北京卷 • ★★★）已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6，S 是 ΔABC 及其内部的点构成的集合，设集合 $T=\{Q\in S\,|\,PQ\le5\}$，则 T 表示的区域的面积为（　　）

（A） $\dfrac{3\pi}{4}$　　（B） π　　（C） 2π　　（D） 3π

解析： Q 在 ΔABC 内，故考虑把 $PQ\le5$ 转换成 Q 与面 ABC 内某点的关系，由正棱锥想到选底面中心，

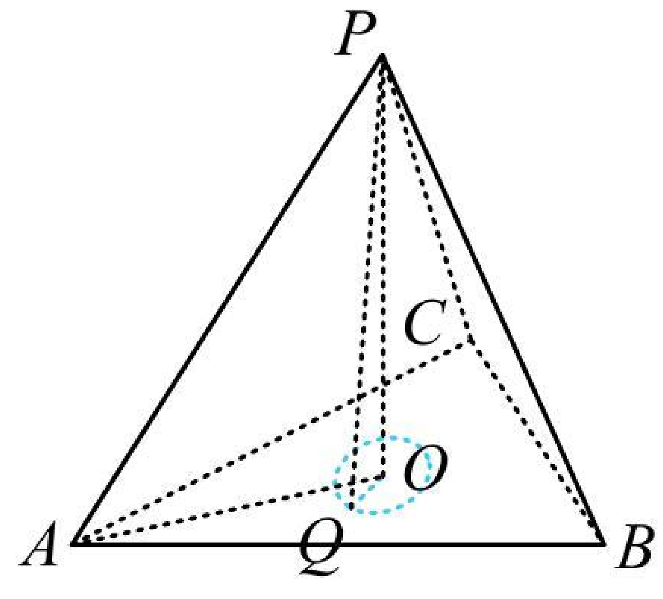
如图，设 O 为 ΔABC 的中心，则 $PO\perp$ 平面 ABC，当 Q 在 ΔABC 内部运动时，总有 $OQ\perp PO$，

所以 $PQ=\sqrt{PO^2+OQ^2}$ ，故 $PQ\le5$ 即为 $\sqrt{PO^2+OQ^2}\le5$ ①，

又 $AO=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=2\sqrt{3}$ ，所以 $PO=\sqrt{PA^2-AO^2}=2\sqrt{6}$ ，代入①得： $OQ\le1$ ，

所以集合 T 表示的区域是 ΔABC 内以 O 为圆心，1 为半径的圆及其内部，其面积为 π .

答案： B



【反思】 空间中到某定点距离为定值的点的轨迹是球面，若该点还在空间的某个平面上，则轨迹就是圆.

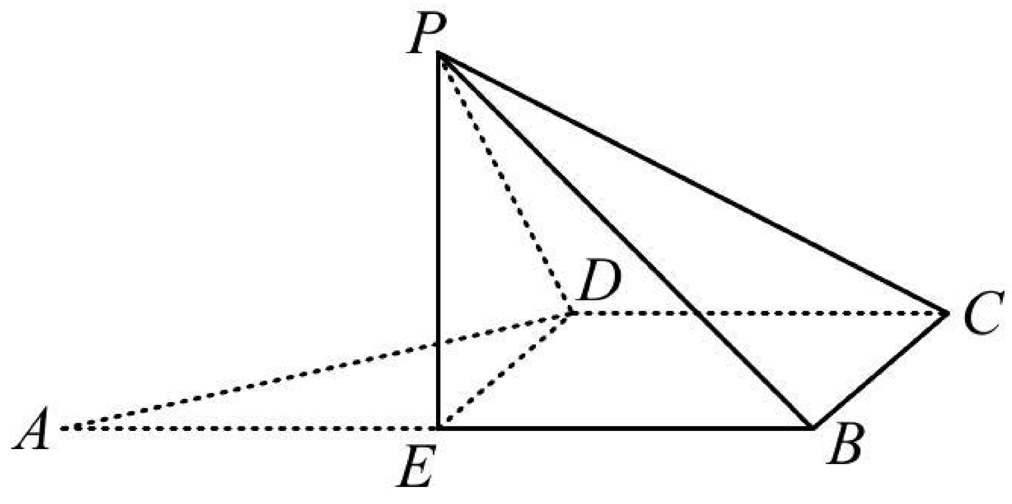
6.（2022·福建模拟·★★★★）（多选）如图，直角梯形 $ABCD$ 中，$AB // CD$，$AB \perp BC$，$BC = CD = \frac{1}{2}AB = 1$，$E$ 为 AB 中点，以 DE 为折痕把 ΔADE 折起，使点 A 到达点 P 的位置，使 $PC = \sqrt{3}$，则（　　）

（A）平面 $PED \perp$ 平面 PCD

（B）$PC \perp BD$

（C）二面角 $P-DC-B$ 的大小为 60°

（D）PC 与平面 PED 所成角为 45°



答案：AB

解析：A 项，要分析面面垂直，先找线面垂直，观察图形可猜想 $CD \perp$ 面 PED，故尝试找理由，

如图，由题设可分析出 $BCDE$ 是边长为 1 的正方形，连接 EC，则 $PE = 1$，$EC = \sqrt{2}$，翻折后 $PC = \sqrt{3}$，所以 $PE^2 + EC^2 = PC^2$，故 $PE \perp EC$，又翻折前 $AE \perp ED$，所以翻折后 $PE \perp ED$，故 $PE \perp$ 面 $BCDE$，所以 $PE \perp CD$，又 $CD \perp DE$，所以 $CD \perp$ 面 PED，从而面 $PED \perp$ 面 PCD，故 A 项正确；

B 项，PC 在面 $BCDE$ 内的射影好找，故用三垂线定理判断，

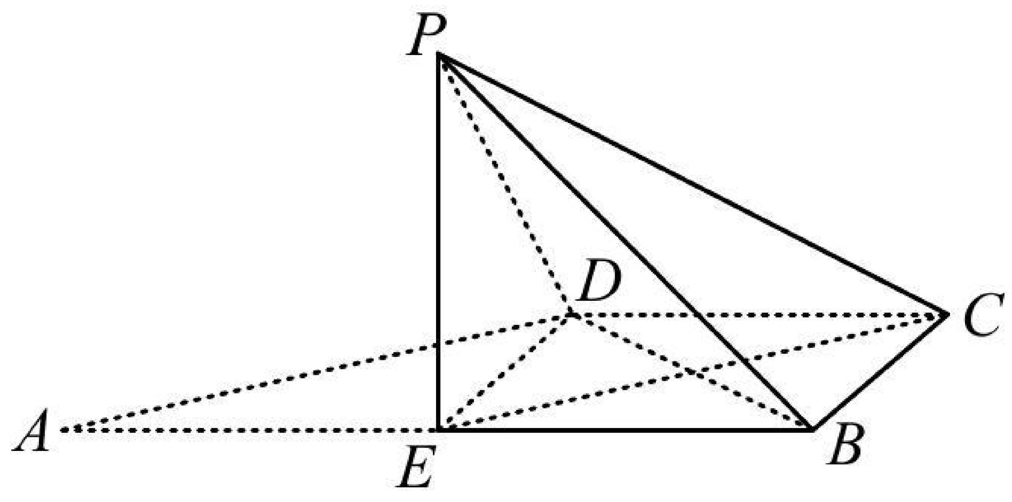
$PE \perp$ 面 $BCDE \Rightarrow PC$ 在该面内的射影为 EC，因为 $BD \perp EC$，所以 $BD \perp PC$，故 B 项正确；

C 项，前面已证 $CD \perp$ 面 PED，所以 $CD \perp PD$，又 $CD \perp DE$，

所以 $\angle PDE$ 即为二面角 $P-DC-B$ 的平面角，$\tan\angle PDE = \frac{PE}{DE} = 1 \Rightarrow \angle PDE = 45^{\circ}$，故 C 项错误；

D 项，因为 $CD \perp$ 面 PED，所以 $\angle CPD$ 即为 PC 与面 PED 所成角，$CD = 1$，

又 $PD = AD = \sqrt{2}$，所以 $\tan\angle CPD = \frac{CD}{PD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $\angle CPD \neq 45^{\circ}$，故 D 项错误.



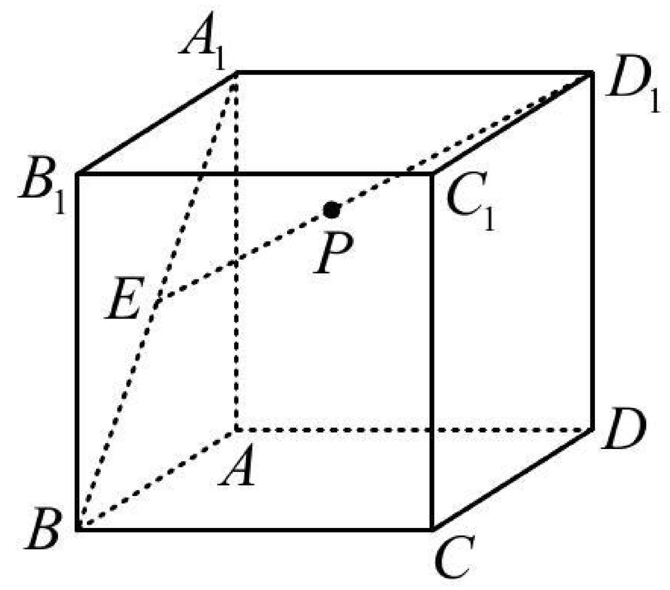
7.（2023·云南模拟·★★★★）（多选）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 E 是 A_1B 的中点，点 P 是线段 D_1E 上的动点，则下列说法正确的是（　　）

（A）$A_1C \perp D_1P$

（B）CP 的最小值为 $\frac{4}{3}$

（C）三棱锥 $P-BC_1D$ 的体积为 $\frac{4}{3}$

（D）存在点 P，使直线 CP 与平面 $ABCD$ 所成角为 60°



答案：AC

解析：涉及线上动点，可由共线向量定理求出点 P 的坐标，用向量法来解决问题，

以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$D_1(0,2,2)$，$E(1,0,1)$，设 $\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1E}(0\le\lambda\le1)$，

则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1P}=\overrightarrow{AD_1}+\lambda\overrightarrow{D_1E}=(0,2,2)+\lambda(1,-2,-1)=(\lambda,2-2\lambda,2-\lambda)$，所以 $P(\lambda,2-2\lambda,2-\lambda)$，

A 项，要判断此选项，只需看 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{D_1P}$ 是否为 0，由图可知，$A_1(0,0,2)$，$C(2,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{A_1C}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{D_1P}=(\lambda,-2\lambda,-\lambda)$，故 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{D_1P}=2\lambda+2(-2\lambda)+(-2)\cdot(-\lambda)=0$，

所以 $A_1C\perp D_1P$，故 A 项正确；

B 项，已有 P 的坐标，可写出 C 的坐标，用空间两点距离公式求 CP，

由图可知，$C(2,2,0)$，所以 $CP=\sqrt{(\lambda-2)^2+(2-2\lambda-2)^2+(2-\lambda)^2}=\sqrt{6\lambda^2-8\lambda+8}=\sqrt{6(\lambda-\frac{2}{3})^2+\frac{16}{3}}$，

所以当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时，CP 取得最小值 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故 B 项错误；

C 项，ΔBC_1D 的面积好求，关键是求点 P 到平面 BC_1D 的距离，因为 P 是动点，所以如果三棱锥 $P-BC_1D$ 的体积是定值，那么点 P 到平面 BC_1D 的距离必定也为定值，于是 ED_1 // 平面 BC_1D，故尝试找平行线，

如图，由正方体的结构特征，D_1Q // BE，且 $D_1Q=BE$，所以四边形 BED_1Q 是平行四边形，

从而 ED_1 // BQ，故 ED_1 // 平面 BC_1D，所以点 P 到平面 BC_1D 的距离是定值，从而 $V_{P-BC_1D}=V_{D_1-BC_1D}$，

故只需算三棱锥 D_1-BC_1D 的体积，观察图形发现转换成以 B 为顶点更好算，

$V_{D_1-BC_1D}=V_{B-C_1D_1D}=\frac{1}{3}S_{\Delta C_1D_1D}\cdot BC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$，所以 $V_{P-BC_1D}=\frac{4}{3}$，故 C 项正确；

D 项，给出线面角，可用向量法求出线面角的正弦值，从而建立方程求 λ，

由图可知 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量，$\overrightarrow{CP}=(\lambda-2,-2\lambda,2-\lambda)$，

所以 $\left|\cos<\overrightarrow{CP},\boldsymbol{n}>\right|=\frac{|\overrightarrow{CP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CP}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|2-\lambda|}{\sqrt{(\lambda-2)^2+(-2\lambda)^2+(2-\lambda)^2}}$

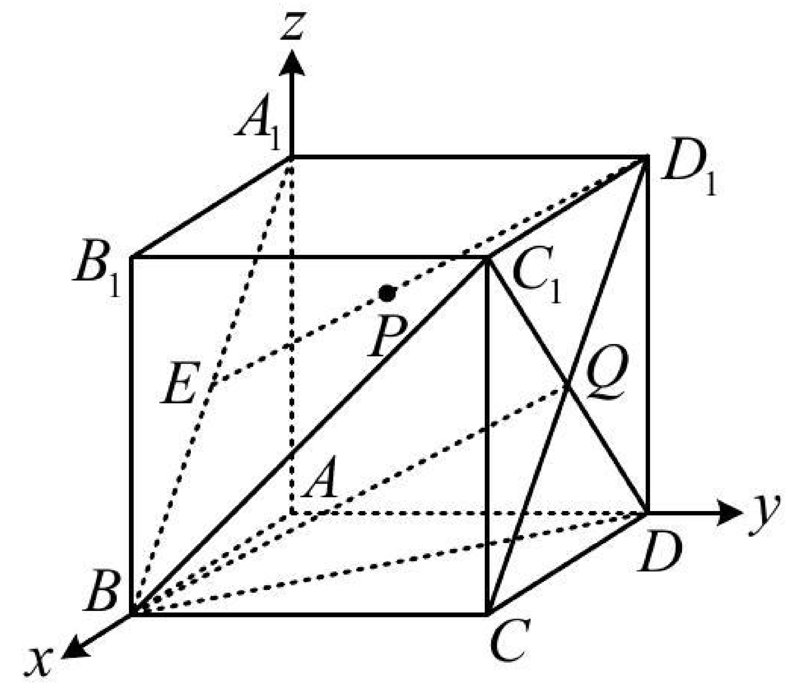
$=\frac{|2-\lambda|}{\sqrt{2(2-\lambda)^2+4\lambda^2}}$，

若 CP 与平面 $ABCD$ 所成的角为 60°，则

$\frac{|2-\lambda|}{\sqrt{2(2-\lambda)^2+4\lambda^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，化简得：$(\lambda-2)^2+6\lambda^2=0$，

《一数·高考数学核心方法》

上述方程无解，所以不存在点 P，使直线 CP 与平面 $ABCD$ 所成的角为 60°，故 D 项错误.



8.（2022 • 山东模拟 • ★★★★）（多选）在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，P 在底面 ABC 上的投影是 AC 中点 D，$DP=DC=1$，则下列结论中正确的是（　　）

（A）$PA=PB=PC$

（B）$\angle PAB$ 的取值范围为 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$

（C）若三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的表面上，则球 O 的表面积为 2π

（D）若 $AB=BC$，E 是棱 PC 上的一个动点，则 $DE+BE$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

答案：ABD

解析：A 项，如图 1，D 为直角三角形 ABC 的斜边 AC 的中点，所以 $DA=DC=DB=1$，

又 $PD\perp$ 面 ABC，所以 $PD\perp AC$，$PD\perp BD$，故 $PA=\sqrt{PD^2+AD^2}=\sqrt{2}$，

《一数•高考数学核心方法》

$PB=\sqrt{PD^2+BD^2}=\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{PD^2+DC^2}=\sqrt{2}$，所以 $PA=PB=PC$，故 A 项正确；

B 项，图形中不确定的是 ΔABC 的直角边长，可把 AB 看成变量，表示 $\cos\angle PAB$，进而分析 $\angle PAB$ 的范围，注意到 $AC=2$，所以 $0<AB<2$，在 ΔPAB 中，由余弦定理，

$\cos\angle PAB=\frac{PA^2+AB^2-PB^2}{2PA\cdot AB}=\frac{2+AB^2-2}{2\sqrt{2}AB}=\frac{AB}{2\sqrt{2}}\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，所以 $\angle PAB\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，故 B 项正确；

C 项，$DP=DA=DB=DC=1\Rightarrow D$ 即为球心，且球的半径 $R=1$，表面积 $S=4\pi R^2=4\pi$，故 C 项错误；

D 项，涉及沿表面的距离最值问题，考虑将空间图形展开到平面上来分析，

若 $AB=BC$，则 ΔABC 是等腰直角三角形，$AC=2\Rightarrow AB=BC=\sqrt{2}$，

所以 ΔPBC 是边长为 $\sqrt{2}$ 的正三角形，将 ΔPBC 沿 PC 翻折到和 ΔPCD 在同一平面，如图 2，

当 E 位于 PC 中点 E' 处时，$DE+BE$ 取得最小值，且最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，故 D 项正确.

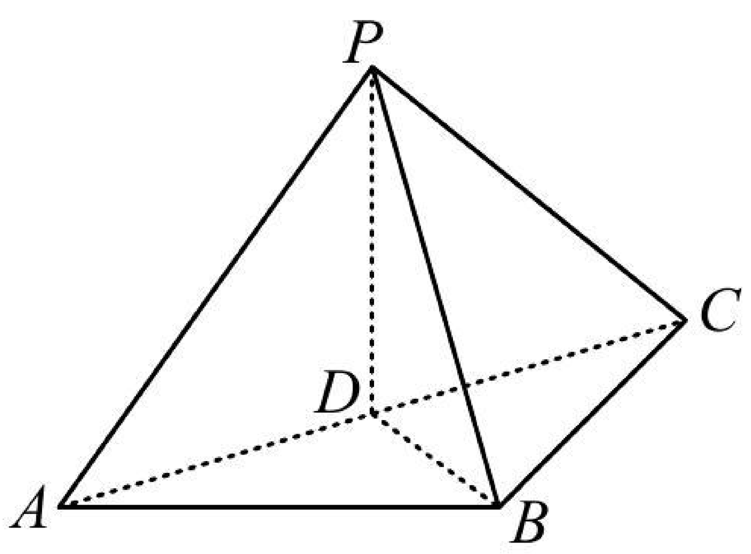


图1

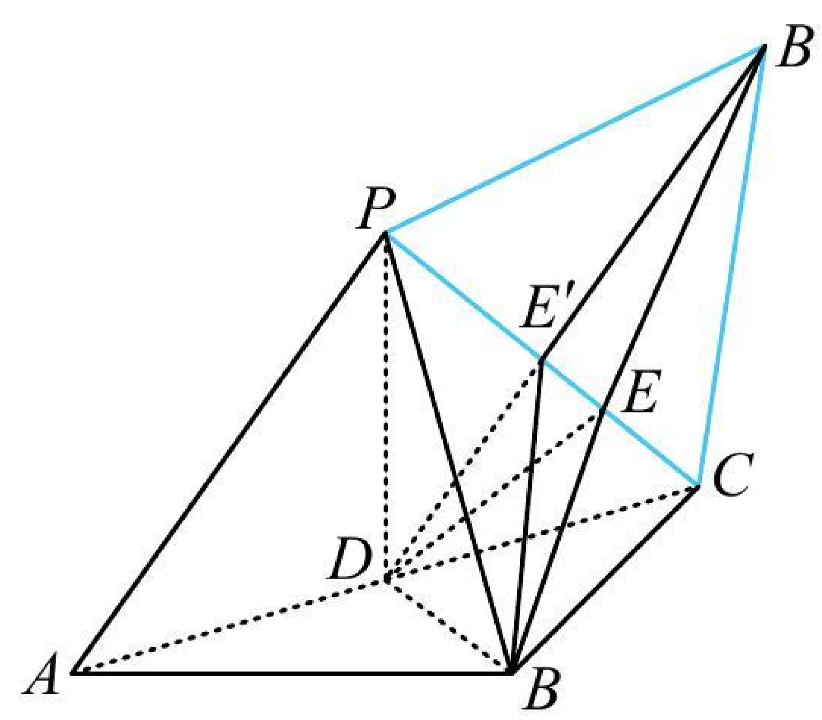


图2

《一数•高考数学核心方法》